数学的帰納法

1－1. n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+2+2^2+\ \cdots\ +2^{n-1}=2^n-1$$

1－2. n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ \cdots\ +(n-1)\cdot n\ =\ \frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

2－1. n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の不等式を証明せよ。

$$3^n>n^2-n+2$$

2－2. n を 4 以上の自然数とする。数学的帰納法を用いて、不等式 $n!>2^n$ を証明せよ。

3－1. n を自然数とする。$7n^3-n$ は 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

3－2. n を自然数とする。$3^{2n+1}+2^{n+2}$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

4－1. $a_1\ =\ 1,\ a_{n+1}\ =(a_n)^2-2na_n+4n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について、

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。

(2) a_n を n で表す式を推測し、それを数学的帰納法で証明せよ。

1 − 1. n を自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$1+2+2^2+\ \cdots\ +2^{n-1}=2^n-1$　… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき、
①の左辺 $=2^{1-1}=1$
①の右辺 $=2^1-1=1$
よって、①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき、①が成り立つと仮定、すなわち
$1+2+2^2+\ \cdots\ +2^{k-1}=2^k-1$　… ②
が成り立つと仮定する。

このとき、
$1+2+2^2+\ \cdots\ +2^{k-1}+2^k=2^{k+1}-1$　… ③
が成り立つことを示せば、$n=k+1$ でも①が成り立つと言える。以下で③を示す。

$n=k+1$ のときの①の左辺を②を用いて式変形すると
$1+2+2^2+\ \cdots\ +2^{k-1}+2^k$
$=2^k-1+2^k$
$=2\cdot2^k-1$
$=2^{k+1}-1$
となるから、①は $n=k+1$ でも成り立つ。

[1], [2] から、数学的帰納法により①は全ての自然数 n で成り立つ。

1 − 2. n を自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ \cdots\ +(n-1)\cdot n\ =\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)\quad \cdots ①$$ とする。

[1] $n=1$ のとき、

①の左辺 $=(1-1)\cdot 1=0$

②の右辺 $=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+1)(1-1)=0$

よって、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、①が成り立つと仮定、すなわち

$$0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ \cdots\ +(k-1)\cdot k\ =\frac{1}{3}k(k+1)(k-1)\quad \cdots ②$$

が成り立つと仮定する。

このとき、

$$0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ \cdots\ +(k-1)\cdot k+k(k+1)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)k\quad \cdots ③$$

が成り立つことを示せば、$n=k+1$ でも①が成り立つと言える。以下で③を示す。

$n=k+1$ のときの①の左辺を②を用いて式変形すると

$$\begin{aligned}&0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ \cdots\ +(k-1)\cdot k+k(k+1)\\ =&\frac{1}{3}k(k+1)(k-1)+k(k+1)\\ =&\frac{1}{3}k(k+1)\{(k-1+3)\}\\ =&\frac{1}{3}(k+1)(k+2)k\end{aligned}$$

となるから、①は $n=k+1$ でも成り立つ。

[1], [2] から、数学的帰納法により①は全ての自然数 n で成り立つ。

2 − 1. n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の不等式を証明せよ。

$3^n > n^2 - n + 2 \quad \cdots$ ①とする

[1] $n = 1$ のとき、①の左辺 = 3、①の右辺 = 2
よって、①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、①が成り立つ、すなわち
$3^k > k^2 - k + 2 \quad \cdots$ ②
が成り立つと仮定する。

このとき、
$3^{k+1} > (k+1)^2 - (k+1) + 2 \quad \cdots$ ③
が成り立つことを示せば、$n = k + 1$ でも①が成り立つと言える。以下で③を示す。

$n = k + 1$ のときの①の両辺の差を②を用いて式変形すると

$$3^{k+1} - \left\{(k+1)^2 - (k+1) + 2\right\}$$
$$= 3 \cdot 3^k - k^2 - k - 2$$
$$> 3\left(k^2 - k + 2\right) - k^2 - k - 2 = 2k^2 - 4k + 4 = 2(k-1)^2 + 2 > 0$$

ゆえに、$3^{k+1} > (k+1)^2 - (k+1) + 2$
よって、①は $n = k + 1$ でも成り立つ。

[1], [2] から、数学的帰納法により①は全ての自然数 n で成り立つ。

2 − 2. $n \geqq 4$ のとき、数学的帰納法を用いて、不等式 $n! > 2^n$ を証明せよ。

$n! > 2^n \quad \cdots$ ①とする

[1] $n = 4$ のとき、①の左辺 = $4! = 24$、①の右辺 = $2^4 = 16$
よって、①は成り立つ。

[2] $n = k$ （$k \geqq 4$）のとき、①が成り立つ、すなわち
$k! > 2^k \quad \cdots$ ②
が成り立つと仮定する。

このとき、
$(k+1)! > 2^{k+1} \quad \cdots$ ③
が成り立つことを示せば、$n = k + 1$ でも①が成り立つと言える。以下で③を示す。

$n = k + 1$ のときの①の両辺の差を②を用いて式変形すると

$$(k+1)! - 2^{k+1}$$
$$= (k+1)k! - 2 \cdot 2^k$$
$$> (k+1)2^k - 2 \cdot 2^k = 2^k\{(k+1) - 2\} = 2^k(k-1) > 0$$

ゆえに、$(k+1)! > 2^{k+1}$
よって、①は $n = k + 1$ でも成り立つ。

[1], [2] から、数学的帰納法により①は全ての自然数 n で成り立つ。

3 − 1. n を自然数とする。$7n^3 - n$ は 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

「$7n^3 - n$ は 3 の倍数であること」を①とする

[1] $n = 1$ のとき、

$7 \cdot 1^3 - 1 = 6 = 3 \cdot 2$

よって、①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、①が成り立つ、すなわち

$7k^3 - k = 3m$ (mは整数)　$\cdots$ ②

が成り立つと仮定する。

このとき、$n = k + 1$ の場合を考えると、

$$
\begin{aligned}
&7(k+1)^3 - (k+1) \\
&= 7k^3 + 21k^2 + 20k + 6 \\
&= 21k^2 + 21k + 3m + 6 \\
&= 3\left(7k^2 + 7k + m + 2\right)
\end{aligned}
$$

これは 3 の倍数であるから、①は $n = k + 1$ でも成り立つ。

[1], [2] から、数学的帰納法により①は全ての自然数 n で成り立つ。

3 − 2. n を自然数とする。$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

「$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ は 5 の倍数である」を①とする

[1] $n = 1$ のとき、

$3^3 + 2^3 = 35 = 5 \cdot 7$

よって、①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、①が成り立つ、すなわち

$3^{2k+1} + 2^{k+2} = 5m$ (mは整数)　$\cdots$ ②

が成り立つと仮定する。

このとき、$n = k + 1$ の場合を考えると、

$$
\begin{aligned}
&3^{2(k+1)+1} + 2^{k+3} \\
&= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 4 \cdot 2^{k+2} \\
&= 5 \cdot 3^{2k+1} + 4 \cdot 4^{2k+1} + 4 \cdot 2^{k+2} \\
&= 5 \cdot 3^{2k+1} + 4(3^{2k+1} + 2^{k+2}) \\
&= 5 \cdot 3^{2k+1} + 4 \cdot 5m \\
&= 5\left(3^{2k+1} + 4m\right)
\end{aligned}
$$

これは 5 の倍数であるから、①は $n = k + 1$ でも成り立つ。

[1], [2] から、数学的帰納法により①は全ての自然数 n で成り立つ。

4 − 1

$a_{n+1} = (a_n)^2 - 2na_n + 4n \ \cdots (A)$ とする。

(1) $a_2 = 1^2 - 2 + 4 = 3$
$a_3 = 3^2 - 12 + 8 = 5$
$a_4 = 25 - 30 + 12 = 7$

(2) (1) より、$a_n = 2n - 1 \ \cdots$ ①と推測できる。以下でこれを数学的帰納法により証明する。

[1] $n = 1$ のとき、
$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
よって $n = 1$ のとき①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、①が成り立つと仮定すると。
$a_k = 2k - 1 \ \cdots$ ②
$n = k + 1$ のとき、(A) を②を使って式変形すると、

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= (a_k)^2 - 2ka_k + 4k \\
&= (2k-1)^2 - 2k(2k-1) + 4k \\
&= 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 6k \\
&= 2k + 1
\end{aligned}
$$

よって、$n = k + 1$ のときも①は成り立つ。
[1][2]から、すべての自然数 n について①は成り立つ。