対称式、交代式の因数分解

1. 次の式を因数分解せよ。

(1) $a+ab+b+1$

(2) $abc-ab-bc-ca+a+b+c-1$

(3) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

(4) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

2. 次の式を因数分解せよ。

(1) $a-ab-b+1$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(3) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

3. 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$ ($a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを用いて良い。)

(2) $a^3-3ab+b^3+1$

(3) $a^3+2b^2-3ab^2$

対称式、交代式の因数分解　解答

1.

(1) $ab+a+b+1$
$=(b+1)a+(b+1)$
$=(a+1)(b+1)$

(2) $abc-ab-bc-ca+a+b+c-1$
$=abc-ab-ca+a-bc+b+c-1$
$=(bc-b-c+1)a-(bc-b-c+1)$
$=(a-1)(bc-b-c+1)$
$=(a-1)\{b(c-1)-(c-1)\}$
$=(a-1)(b-1)(c-1)$

(3) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$
$=a^2b+ca^2+ab^2+2abc+c^2a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$

(4) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$=(b+c)a^2+b^2c+b^2a+c^2a+bc^2+3abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+3bc)a+bc(b+c)$
$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

2.

(1) $a-ab-b+1$
$=(1-b)a+(1-b)$
$=(a-1)(1-b)$
$=-(a-1)(b-1)$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=(b-c)a^2+b^2c-b^2a+c^2a-bc^2$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(3) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$=(b-c)a^3+b^3c-b^3a+c^3a-bc^3$
$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$
$=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c)$
$=(b-c)\left\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b-c)\right\}$
$=(b-c)\left\{(c-a)b^2-c(c-a)b-a(c+a)(c-a)\right\}$
$=(b-c)(c-a)\left\{b^2-bc-a(c+a)\right\}$
$=(b-c)(c-a)(b-a)(b+c+a)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

3.

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a^3+b^3)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=\{(a+b)+c\}\left\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(2) $a^3-3ab+b^3+1$

$=a^3+b^3+1^3-3ab\cdot 1$

$=(a+b+1)(a^2+b^2+1^2-ab-b\cdot 1-1\cdot a)$

$=(a+b+1)(a^2+b^2-ab-b-a+1)$

(3) $a^3+2b^3-3ab^2$

$=a^3+b^3+b^3-3ab\cdot b$

$=(a+b+b)(a^2+b^2+b^2-ab-b\cdot b-ba)$

$=(a+2b)(a^2+b^2-2ab)$

$=(a+2b)(a-b)^2$